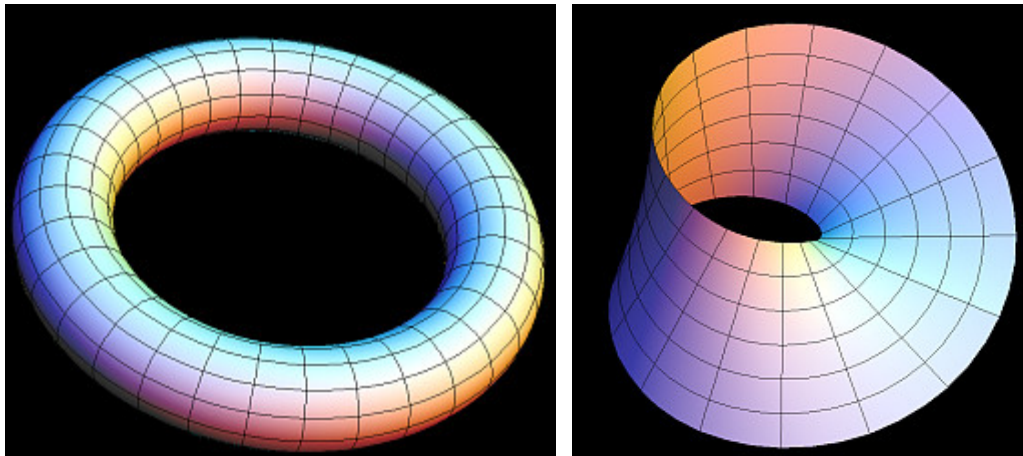


Aula 6

Fluxo através de uma superfície (orientável)

Definição: Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície, isto é, uma variedade de dimensão 2. Diz-se que S é **uma superfície orientável** se existir um campo vetorial contínuo $\nu : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que em cada ponto $p \in S$ o vetor $\nu(x)$ é unitário e normal a S . Quando tal é verificado, existem duas alternativas para esse campo, $\pm\nu$, e cada uma delas diz-se que define **uma orientação de S** (das duas possíveis).

Esta definição é generalizável a qualquer variedade $M \subset \mathbb{R}^n$, de dimensão $n - 1$ (designa-se por **hipersuperfície**).



Orientável vs Não-orientável

Definição: Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície orientável, ou, mais geralmente $S \subset \mathbb{R}^n$, uma hipersuperfície (variedade de dimensão $n - 1$) orientável. Seja $\nu : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ a escolha de uma das duas possíveis orientações de S e seja $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial contínuo definido em S . Designa-se por **fluxo de \mathbf{F} através de S na orientação dada por ν** o integral

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \nu \, dS.$$

Proposição: Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície, ou seja, uma variedade de dimensão 2, orientável, parametrizada (globalmente) por $g : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, e seja $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial contínuo sobre a superfície. Então, o fluxo de \mathbf{F} através de S é dado por

$$\pm \int_{\Omega} \mathbf{F}(g(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right) \, du \, dv,$$

com a escolha do sinal \pm de acordo com a orientação escolhida para a superfície.

Divergência

Definição: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $\mathbf{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$, um campo vetorial de classe pelo menos $C^1(\Omega)$. Designa-se por **divergência de \mathbf{F}** , e representa-se por $\operatorname{div} \mathbf{F}$ ou $\nabla \cdot \mathbf{F}$, o operador diferencial que transforma o campo vetorial \mathbf{F} num campo escalar, dado por

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

Diz-se que um campo vetorial \mathbf{F} é **solenoidal** ou **incompressível** se tem divergência nula,

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 0.$$

Propriedades: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ campos vetoriais de classe $C^1(\Omega)$, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar de classe $C^2(\Omega)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ constantes arbitrárias.

Então tem-se:

- i) $\operatorname{div} \mathbf{F} = \operatorname{tr} D\mathbf{F}$ (traço da matriz jacobiana de \mathbf{F}).
- ii) $\operatorname{div} \mathbf{x} = \operatorname{div}(x_1, x_2, \dots, x_n) = n$.
- iii) $\operatorname{div}(\alpha\mathbf{F} + \beta\mathbf{G}) = \alpha \operatorname{div} \mathbf{F} + \beta \operatorname{div} \mathbf{G}$ (linearidade).
- iv) $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{div} \mathbf{F} + \nabla f \cdot \mathbf{F}$.
- v) $\operatorname{div} \nabla f = \Delta f$,

em que Δf é o chamado **laplaciano** de f dado por

$$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

Rotacional (em \mathbb{R}^3)

Definição: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e $\mathbf{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$, um campo vetorial de classe pelo menos $C^1(\Omega)$. Designa-se por **rotacional de \mathbf{F}** , e representa-se por $\text{rot } \mathbf{F}$ ou $\nabla \times \mathbf{F}$, o operador diferencial que transforma o campo vetorial \mathbf{F} num campo vetorial, dado por

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Diz-se que um campo vetorial \mathbf{F} é **irrotacional** se tem rotacional nulo,

$$\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

Propriedades: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto,
 $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ campos vetoriais de classe $C^2(\Omega)$,
 $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar de classe $C^2(\Omega)$ e
 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ constantes arbitrárias.

Então tem-se:

- i) $\text{rot}(\alpha\mathbf{F} + \beta\mathbf{G}) = \alpha \text{rot} \mathbf{F} + \beta \text{rot} \mathbf{G}$ (linearidade).
- ii) $\text{rot}(f\mathbf{F}) = f \text{rot} \mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F}$.
- iii) $\text{rot}(\nabla f) = 0$.
- iv) $\text{div}(\text{rot} \mathbf{F}) = 0$.

Teorema da Divergência

(ou de Gauss-Ostrogradsky)

Teorema: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado, com uma fronteira $\partial\Omega$ seccionalmente constituída por uma variedade diferenciável de dimensão $n - 1$ (variedade com cantos).

Seja $\mathbf{F} : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$, um campo vetorial de classe pelo menos C^1 . Então, tem-se

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dV_n = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \nu dV_{n-1},$$

em que ν é a normal unitária exterior à fronteira de Ω .